БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ . BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

ИНЖЕНЕРНА ГЕОЛОГИЯ И ХИДРОГЕОЛОГИЯ. 11. ENGINEERING GEOLOGY AND HYDROGEOLOGY . 11

София . 1981 . Sofia

Установяване на линейни премествания при изследване на свлачищни явления

Ценко Ценков

Ц е н к о в, Ц. 1981. Установление линейных смещений при исследовании оползневых явлений. — *Инж. геол. и хидрогеол.*, 11, 36—43.

Рассматривается движение одной точки оползня за определенный отрезок времени. Если в данный момент координаты точки определены неправильно, при помощи подходящего критерия предварительно открывается резко отклоняющийся результат измерения, и его величина определяется двумя описанными способами. Делается сопоставление полученных результатов.

Адрес: Болгарская академия наук, Лаборатория геотехники, 1113 София.

T z e n k o v, T z., 1981. Determining of Linear Displacements at Investigation of Sliding Phenomena. — *Engineering Geology and Hydrogeology*, 11, 36—43.

The movement of one sliding point is examinated for a period of time given. In certain moment the determined point co-ordinate value is erroneous. By means of suitable criterion the result of the erroneous measurement is checked preliminary and after that its value is determined by two means. The numerical results obtained are compared.

Address: Bulgarian Academy of Sciences, Geotechnical Laboratory, 1113 Sofia.

В резултат на геодезически измервания са получени данни от вида

$$x_i=f(t_i), \quad i=1, 2, \dots, p, \dots, n, \tag{1}$$

където с x_i е означена координатата на контролна точка в момент t_i, отчетена от някакво начално положение. Без ограничение за общността на идеята тук се разглежда само случаят, когато (1) е линейна функция. Измерванията в отделните моменти са независими и равнотежестни и са извършвани през равни интервали от време за разглеждания период.

За момента t_p е погрешно определена координатата x_p.

Откриване на рязко отклоняващи се измервания

В геодезическата практика често възниква въпросът, трябва ли да се отхвърля рязко отклоняващо се от другите резултати отделно измерване. Ако се установи, че то е наистина груба грешка, трябва предварително да се отхвърли и данните да се обработят отново с цел да се получи модел, освободен от влиянието на грубата грешка.

Данните (1) са случайни функции и от тях трябва да се изведат оценки за търсени параметри. За целта е подходящо да се приложи критерий, предложен в Роре, 1975, основаващ се на статистиката

$$v_i/\widehat{\sigma}_{v_i}, \tag{2}$$

където v_i е i-тият елемент на вероятните поправки, а $\widehat{\sigma}_{v_i}^2$ — оценката на съответната дисперсия.

Отношението (2) има τ-разпределението на Томпсън

$$\tau_n = \frac{\sqrt{n}\, t_{n-1}}{\sqrt{n-1+t_{n-1}^2}}, \tag{3}$$

където n е броят на степените на свобода, а t_{n-1} — т. нар. разпределение на Стюдент с $n-1$ степени на свобода.

Процедурата на отхвърляне се свързва с нулевата хипотеза, че случайната величина v_i има нормално разпределение с параметри $(0, \widehat{\sigma}_{v_i})$. Проверката се извършва с помощта на т. нар. τ-критерий, като всички поправки, за които

$$(v_i/\widehat{\sigma}_{v_i}) \geqq C, \tag{4}$$

където C е критична точка, съответствуваща на ниво на значимост α, се елиминират и следователно съответните резултати от измерванията се считат за рязко отклоняващи се. След като предварително се открие и елиминира от по-нататъшна обработка рязко отклоняващото се измерване е уместно да се намери неговата стойност, като се използува достоверността на получената от измерванията информация.

Данните (1) са случайни функции и за да се намери стойността на координатата x_p за промеждутъчния момент t_p трябва да се приложи математически апарат, присъщ за теорията на случайните функции. За целта в настоящата работа се прилагат два начина — линейно-статистическа апроксимация и метод на най-малките квадрати, и числено се сравняват получените резултати.

Приложение на линейно-статистическата апроксимация

Постановката на апроксимацията на случайни функции и подробния извод на формулите се дава във Вергасов и др., 1976. Тук се използуват без доказателство някои работни формули.

В действителност координатите $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_n$ в (1), получени за моментите $t_1, t_2, \ldots, t_p, \ldots, t_n$, са натоварени съответно със случайните грешки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p, \ldots, \Delta_n$. Математичното очакване на случайната функция е равно на нула, а нейната корелационна функция $R(\Delta)$ зависи само от разликата в индексите l на моментите t_l. Освен това случайната грешка Δ (t_p) е некорелирана със самата функция $f(t)$. Тогава за изходни данни ще служат значенията на функцията

$$X = F(t) = f(t) + \Delta(t). \tag{5}$$

Означаваме с X^* транспонирания вектор-стълб на координатите $X^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, а с $\mathbf{a}_p$ вектора-ред на търсените коефициенти и при условието за линейна зависимост ще имаме за координатата в промеждутъчния момент

(6) $$\tilde{x}_p = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}_{p_i} X_i.$$

Практически решаването на поставената задача се свежда до оптимален подбор на коефициентите a_p при минимална дисперсия $D_\varepsilon\,(p)$ на грешката в предсказването ε_p. Оценката за точността в определянето на $\tilde{x}_p$ се дава от т. нар. остатъчна дисперсия

(7) $$D_\varepsilon(p) = D(p) - \mathrm{a}_p \mathbf{K}_p,$$

където $\mathbf{K}_p$ е вектор-стълба на разликата в индексите $(i-p)$, а $D(p)$ е дисперсията на случайните грешки в момента p.

Ако се намери производната $D_\varepsilon\,(p)$ по отношение на вектора a_p и се приравни на нула, се получава уравнението

(8) $$(\mathbf{K}+\mathbf{R})\mathrm{a}_p^* = \mathbf{K}_p.$$

Тук $\mathbf{K}$ е корелационната матрица на координатите X_i в зависимост от l, а $\mathbf{R}$ — корелационната матрица на случайните грешки Δ. След решаване на (8) се получава

(9) $$\mathrm{a}_p^* = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_p$$

и окончателно за търсената стойност на координатата в момента t_p

(10) $$\tilde{x}_p = \mathbf{K}_p^* \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X}.$$

Удобно е (10) да се запише във вида

(11) $$\tilde{x}_p = \mathbf{b}\, K_p,$$

където $\mathbf{b}^*$ е вектор-стълб, служещ за решаване на системата

(12) $$\mathbf{K}\mathbf{b}^* = \mathbf{X}.$$

На това място е важно да се подчертае, че изчислената по (8) и (11) стойност $\tilde{x}$, за който и да е момент t_i, няма да съвпада с изходните координати $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а ще изглажда грешките Δ_i по метода на най-малките квадрати. Формулите (8) и (11) са изведени при предпоставката, че корелационните матрици K и R са известни.

В действителност е необходимо да бъдат изведени оценки за техните елементи. Във Вергасов, 1976 се дава приблизителен начин за определянето на корелационните матрици $\mathbf{K}_x\,(l)$ и $\mathbf{R}_\Delta\,(l)$, който накратко се състои в следното: означава се с $\mathbf{K}_X\,(l)$ необходимата ни сума

(13) $$\mathbf{K}_X(l) = \mathbf{K}_x(l) + \mathbf{R}_\Delta(l).$$

За определяне на $\mathbf{K}_X\,(l)$ се разбиват в интервала $(a,\,b)$ възможните значения l на частични подинтервали с дължина Δl, където Δl е най-малкото разстояние между моментите, зададени в (5).

Намира се такова натурално число τ, така че

(14) $$\tau\Delta l \leqq b - a \leqq (\tau+1)\Delta l.$$

За всяко $p\Delta l$, където $p = 0, 1, 2, \ldots, n,$ се изчислява оценката на съответния корелационен момент $K_X\,(p\Delta l)$ по формулата

(15) $$K_X(p\Delta l) \approx \frac{1}{n_p} \sum_{i<j} X_i X_j.$$

Тук X_i, X_j са значенията X, взети за тези моменти T_i, T_j, разстоянието $|T_i T_j|$ между които удовлетворява условието

(16) $$p\Delta l - \frac{\Delta l}{2} |T_i T_j| \leqq p\Delta l + \frac{\Delta l}{2},$$

където n_p е количеството такива двойки X_i, X_j, $i<j$.

Резултатите, изчислени по (15), се апроксимират по метода на най-малките квадрати. Всяка координата в (5) се получава независимо и равноточно във всеки момент, случайните грешки са равнотежестни и некорелирани и затова матрицата **R** е диагонална

(17) $$\mathbf{R} = \mathbf{D}_\Delta \mathbf{E},$$

където **E** е единична матрица.

Получената от (15) K_X $(p\Delta l)$ се оказва равна на K_x $(p\Delta l)$ при всички $p=1, 2, \ldots, n$. Само при $p=0$ се получава $K_X(0)=K_x(0)+R_\Delta(0)$. Като се осъществи апроксимацията (15) при $p=1, 2, \ldots, r$, се намира K_x (l).

Ако в (15) се положи $p=0$, се намира оценката

(18) $$K_X(0) = D_X = D_x - D_\Delta \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

След това се намира $D_\Delta = D_X - D_x$ и матрицата **R** е напълно определена по (17).

Практическото използуване на формулите за линейна статистическа апроксимация има следната последователност:

1) по функцията (5) и нейната корелационна функция K_x (l) се съставя нормалната матрица **K**, всеки елемент на която има вида $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_X(l_{ij})$, където $l_{ij} |t_i t_j|$, i, $j=1, 2, \ldots, n$;

2) решава се системата нормални уравнения (12);

3) стойността на координатата $\widetilde{x}_p$ за промеждутъчния момент t_p се получава от (10), където за елементи на вектора-стълб K_p служат разликите в индексите $(t_i t_p)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Приложение на метода на най-малките квадрати

Стойността на отклоняващата се координата може да се получи и чрез изглаждане на данните (1) по метода на най-малките квадрати. Тъй като се приe, че функцията е линейна, то

(19) $$x = at + b,$$

в която a и b са параметри, които ще изведем по метода на най-малките квадрати.

Уравненията на поправките имат вида

$$at_1 + b - x_1' = v_1,$$

$$at_2 + b - x_2' = v_2,$$

(20) $$\cdots\cdots$$

$$at_p+b-x'_p=v_p,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$at_n+b-x'_n=v_n,$$

където a и b са неизвестни параметри, съответните измервания са x'_i, а коефициентите при a и b образуват матриците

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_p & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{AA}^*=\begin{Vmatrix} [t^2] & [t] \\ [t] & [n] \end{Vmatrix}; \qquad \mathbf{A}^*\mathbf{L}=\begin{Vmatrix} [tx] \\ [x] \end{Vmatrix}. \tag{21}$$

Така че имаме система нормални уравнения с две неизвестни

$$\begin{aligned} &[t^2]a+[t]b-[tx]=0, \\ &[t]a+nb-[x]=0, \end{aligned} \tag{22}$$

решаването на която ни дава a и b. По-нататък за промеждутъчната координата в момент t_p имаме

$$\tilde{x}_p=at_p+b, \tag{23}$$

а за оценката на средната квадратна грешка получаваме

$$m_{\tilde{x}_p}=\pm\mu_0\sqrt{\|t_p t_1\|\mathbf{Q}_x\begin{Vmatrix} t_p \\ t_1 \end{Vmatrix}}, \tag{24}$$

където μ_0 е средната квадратна грешка за единица тежест, а $\mathbf{Q}_x$ — матрица на тежестните коефициенти.

Числено сравняване на резултатите. Изводи

Резултатите от 10 цикъла измервания на x-координатата на контролна точка № 12 (свлачище Балчик) са дадени в табл. 1.

Таблица 1
Table 1

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i, m	3,583	3,324	3,136	2,760	2,353	1,870	1,865	1,662	1,295	1,109

Прилага се критерият (4) за предварително откриване на рязко отклоняваща се от другите данни координата. За целта от данните в табл. 1 извеждаме правата

$$x=at+b. \tag{25}$$

Численият вид на нормалните уравнения е

$$\begin{aligned} 385\,a+55\,b-102{,}760&=0, \\ 55\,a+10\,b-\ 22{,}957&=0, \end{aligned} \tag{26}$$

след решаването на които получаваме търсените параметри a и b и средната грешка за единица тежест:

(27) $$a=-0{,}285;\ b=+3{,}863;\ \mu_0=\pm 0{,}123.$$

Корелационната матрица на поправките $\mathbf{Q}_v$ е

(28) $$\mathbf{Q}_v=\mathbf{E}-\mathbf{A}\mathbf{Q}_x\mathbf{A}^*,$$

където E е единичната матрица, $\mathbf{A}$ — матрицата на коефициентите пред неизвестните, а $\mathbf{A}^*$ — транспонираната матрица на $\mathbf{A}$. Решаването на (28) дава необходимия елемент $\mathbf{Q}_{v_6}$ от главния диагонал на матрицата.

Сега трябва да се изчисли критичната точка С, която е свързана с τ-разпределението на Томпсън. При $n=8$ степени на свобода и при ниво на значимост $\alpha=0{,}05$

(29) $$C=\sqrt{8}\ 2{,}365/\sqrt{7+2{,}365^2}=1{,}644.$$

Статистиката $v_6/\mu_0\sqrt{Q_{v_6}}$ е

(30) $$0{,}283/0{,}123\sqrt{0{,}898}=2{,}428$$

и се получава

(31) $$2{,}428>1{,}644.$$

Следователно резултатът от измерването в 6-ия момент рязко се отделя в серията данни.

Преминава се към процедурата за намиране стойността на x-координатата за 6-ия момент измерване чрез апроксимация на случайни функции. По данните в табл. 2 се намира за математичното очакване

(32) $$M(x)=2{,}317$$

и по (5) съответните стойности $X_i=x_i-M(x)$.

Таблица 2
Table 2

t_i	1	2	3	4	5	7	8	9	10
x_i, m	3,583	3,324	3,136	2,760	2,353	1,865	1,662	1,295	1,109
X	+1,266	+1,007	+0,819	+0,443	+0,036	−0,452	−0,655	−1,022	−1,208

Сега трябва да се определи по формула (13) $\mathbf{K}_X(l)$ и $\mathbf{R}_\Delta(l)$ и за нашия случай необходимите данни са

(33) $$a=1,\quad b=10,\quad \Delta l=1,\quad \tau=9.$$

По (15) и (16) се осъществява апроксимацията при $p=0,\ 1,\ldots,9$ и получените резултати се дават в табл. 3. От тези данни по метода на най-малките квадрати се намират интересуващите ни параметри

(34) $$\begin{aligned} K(0)=D_x &= +0{,}597,\\ D_X &= +0{,}736,\\ \mathbf{R} &= +0{,}139\,\mathbf{E}. \end{aligned}$$

Таблица 3
Table 3

p	0	1	2	3	4	5	7	8	9	10
$K_X(p\Delta l)$	+0,736	±0,668	+0,458	+0,184	−0,163	−0,372	−0,651	−0,949	−1,255	−1,529

По-нататък по (13) се получава

$$K_X(l) = -0{,}183\,X + 0{,}597. \tag{35}$$

Вече са на лице необходимите данни за решаването на (8) и (9). Матрицата K, която е симетрична,

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc} 0{,}736 & 0{,}414 & 0.231 & 0{,}048 & -0{,}135 & -0{,}501 & -0{,}684 & -0{,}867 & -1{,}233 \\ & 0{,}736 & 0{,}414 & 0{,}231 & 0{,}048 & -0{,}318 & -0{,}501 & -0{,}684 & -0{,}867 \\ & & 0{,}736 & 0{,}414 & 0{,}231 & -0{,}135 & -0{,}318 & -0{,}501 & -0{,}684 \\ & & & 0{,}736 & 0{,}414 & 0{,}048 & -0{,}135 & -0{,}318 & -0{,}501 \\ & & & & 0{,}736 & 0{,}231 & 0{,}048 & -0{,}135 & -0{,}318 \\ & & & & & 0{,}736 & 0{,}414 & 0{,}231 & 0{,}048 \\ & & & & & & 0{,}736 & 0{,}231 & 0{,}048 \\ & & & & & & & 0{,}736 & 0{,}414 \\ & & & & & & & & 0{,}736 \end{array} \right\| \tag{36}$$

и вектора

$$K_p^* = \|5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4\|. \tag{37}$$

По (10) и (7) се получава за търсената стойност и оценката за точността

$$\widetilde{x}_6 = 2{,}197 \text{ m}, \qquad D_{u_6} = \pm 0{,}029 \text{ m}. \tag{38}$$

Търсената стойност $\widetilde{x}_6$ може да се получи и чрез изравняване на данните по метода на най-малките квадрати.

По данните от табл. 2 нормалните уравнения имат следния вид:

$$\begin{aligned} 349\,a + 49\,b - 91{,}540 &= 0, \\ 49\,a + \;\;9\,b - 21{,}087 &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

След решаване на система (39) a и b се получава

$$a = -0{,}283 \text{ m}, \quad b = +3{,}884 \text{ m}. \tag{40}$$

Средната грешка за единица тежест и тежестните коефициенти са

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \pm 0{,}067 \text{ m}, \quad Q_{11} = +0{,}012, \\ Q_{12} &= -0{,}066, \quad Q_{22} = +0{,}472. \end{aligned} \tag{41}$$

За търсената стойност и оценката на средната ѝ грешка се получава по известните формули

$$\widetilde{x}_6 = 2{,}186 \text{ m}, \qquad m_{x_6} = \pm 0{,}022 \text{ m}. \tag{42}$$

Сравняването на резултатите за промеждутъчната стойност и оценката на средната ѝ грешка, получени по двата начина, дава разлика от 1 cm, която е допустима при измерване на свлачища, а по-неточната оценка по първия начин се дължи на сравнително малкия обем на извадката. Налага се изводът, че при достатъчно голям брой на измерванията по-приемливи резултати се получават чрез апроксимация на случайни функции, където има допълнителна информация за структурата на случайната функция $x=f(t)$ чрез нейната корелационна функция K_x. При всички други случаи по-подходящо е да се определя промеждутъчната стойност в серията от данни по метода на най-малките квадрати.

Литература

Вергасов, В. А. и др. 1972. *Вычислительная математика.* М., Недра.

Pope, Allen J. 1975. The statistics of residuals and the detection of out liers. — In: Int. Umon Geod. and Geophys. Int. Assoc. Geod. XVI. Gen. Assem. Grenoble.

Одобрена на 11. XII. 1979 г. *Accepted by December 11, 1979*

Determining of Linear Displacements at Investigation of Sliding Phenomena

Tzenko Tzenkov

(Summary)

For determining the relationships and tendences in the sliding process development it is important to evaluate the quality of results from geodetic measurements. A statistic criterion is proposed for this purpose, by means of which may be founded and rejected from a further processing a result of the measurements deflecting sharply from the others. For an exact evaluation of this result a linear statistic approximation of random functions and the method of least squares are applied. A numerical example is given and the results obtained are compared. The method of least squares is the preferred one because during a geodetic investigation of slides the number of measurements is restricted.